

一种多层不完全 LU 分解预处理方法 在合元极技术中的应用

彭 朕^{1,2,3}, 盛新庆²

(1. 中国科学院电子学研究所微波成像国家级重点实验室, 北京 100080;
2. 北京理工大学电子工程系, 北京 100081; 3. 中国科学院研究生院, 北京 100039)

摘 要: 本文将一种多层不完全 LU 分解预处理方法应用于合元极技术(即混合有限元、边界元、快速多极子技术)。理论和数值实验表明,此种预处理方法能大大减少合元极技术的内存需求,同时兼有极高的计算效率。本文首先给出此种预处理方法的构造方式和实施步骤,接着对此种预处理方法在合元极技术中的数值性能进行了理论和数值实验的分析研究;最后,本文计算了几种电大尺寸复杂目标的散射,以展示应用了此种预处理方法的合元极技术的计算能力。

关键词: 多层不完全 LU 分解; 预处理技术; 合元极技术

中图分类号: O441 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112(2008)02-0230-05

Application of Multilevel Inverse-Based ILU Preconditioning Approach to Hybrid FE/ BI/ MLFMA for 3D Scattering

PENG Zhen^{1,2,3}, SHENG XirQing²

(1. National Key Lab of Microwave Image Technology, Institute of Electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China;
2. Department of Electronic Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;
3. Graduated University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: A novel multilevel inverse based ILU (MIB-ILU) preconditioning approach is applied to the hybrid finite element/boundary integral/multilevel fast multipole algorithm (FE/BI/MLFMA) for 3D scattering problems. Unlike the traditional ILU preconditioning technique, this MIB-ILU approach borrows the concept of the algebraic multi grid method (AMG) to construct an algebraic multilevel recursive ILU preconditioning framework. Moreover, a new version of ILU factorization and an inverse based dropping strategy are employed to improve the robust of the preconditioning approach. The numerical performance of the proposed MIB-ILU approach is studied. It is demonstrated that this approach exhibits high efficiency in memory and CPU time. Then, the proposed MIB-ILU approach is applied to the hybrid FE/BI/MLFMA method. A variety of numerical experiments are carried out, demonstrating that the proposed approach offers a good compromise between robustness and efficiency, and greatly improves the computing capability of the hybrid FE/BI/MLFMA.

Key words: incomplete LU preconditioning; inverse based dropping strategy; multilevel recursive framework; electromagnetic scattering; hybrid finite element/boundary integral/multilevel fast multipole algorithm

1 引言

合元极技术是近年来日益受到关注的一种精确、高效、通用的电磁计算技术,被广泛应用于求解各类电磁问题^[1~10]。文[10]对此种技术进行了较为全面、系统的总结,比较了此种技术中各种算法的数值性能。数值实

验表明分解算法具有最快的收敛速度。但这种算法是需要对有限元稀疏矩阵进行 LU 分解为代价的。即使用目前最先进的多波前 LU 分解技术^[12],这个代价仍是十分巨大的,成为合元极技术应用于求解电大复杂电磁问题的瓶颈。为此,本文将一种多层不完全 LU 分解预处理方法应用于合元极的分解算法,在保证较高计算效

率下, 极大地减少了合元极技术的内存需求, 使合元极技术应用于求解电大复杂电磁问题成为可能。

2 合元极分解算法分析

由文[10]可知, 合元极技术最后归结为对下列方程的求解

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IS_i} & 0 \\ K_{S_j} & K_{S_j S_i} & B \\ 0 & P & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_I \\ E_{S_i} \\ E_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_{S_i} \\ b \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中 $[K_{II}]$, $[K_{S_j S_i}]$, $[K_{IS_i}]$, $[K_{IS_j}]$, $[B]$ 是有限元稀疏矩阵, $[P]$ 和 $[Q]$ 是矩量法满阵。考虑到有限元稀疏矩阵和矩量法满阵具有不同的特性和条件数, 我们设计了一种分解算法^[10]。对于有限元未知数很多的问题, 这种算法内存和计算量需求最大的一步就是用 $[H_S]$ 求出 $[E_S]$ 。即先对有限元矩阵进行 LU 分解

$$\begin{bmatrix} K_{II} & K_{IS_j} \\ K_{S_j} & K_{S_j S_i} \end{bmatrix} = [L] [U] \quad (2)$$

这里 $[L]$ 是下三角矩阵, $[U]$ 是上三角矩阵。再由下式求出电场 $\{H_{S_j}\}$

$$\begin{bmatrix} E_I \\ E_{S_j} \end{bmatrix} = - [U]^{-1} [L]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} \{H_S\} \quad (3)$$

不难知道, 采取此种方式, 即用直接法计算出 $\{H_{S_j}\}$, 即使采用多波前技术, 式(2)的 LU 分解所需内存和计算量都很大, 大大限制了合元极技术求解问题的规模。

3 预处理矩阵的构造

针对上述问题, 本文考虑采用迭代法计算 $\{E_{S_j}\}$ 。对于迭代方法而言, 解的收敛速度主要是由迭代矩阵 A 的谱特性决定的。若直接将迭代算法应用于大型有限元稀疏矩阵, 一般效果不佳, 往往需要考虑预处理技术。下面在 Crout 不完全 LU 分解^[11]基础上, 针对有限元矩阵的稀疏对称的特点, 构造出一个具有多级递归结构^[15]的预处理矩阵。下面先讲述 Crout 不完全分解算法, 后给出结合多重网格思想而提出的多层不完全 LU 分解算法。

3.1 Crout 不完全 LU 分解

顾名思义, Crout 不完全 LU 分解的构造是基于 Crout LU 分解。Crout LU 分解算法在第 k 步计算 L 的第 k 列和 U 的第 k 行。计算过程可以由图 1 形象的表示, 黑色部分为第 k 步正在计算的部分, 阴影部分为计算第 k 步时需要存取的部分。采用 Crout 分解的方式构造不完全分解矩阵的好处有二点: (1) 采用 Crout 分解后的下三角矩阵 L 为按列存储, 上三角矩阵 U 为按行存储, 便于存储和处理; (2) 由于在第 k 步计算 L 的第 k 列和 U 的第 k

行, 每次只对一行元素和一系列元素进行操作, 易于加入丢弃策略, 丢弃元素, 构造不完全 LU 分解矩阵。由上述 Crout 分解出发, 加入丢弃策略, 便可构造出 Crout 不完全分解。

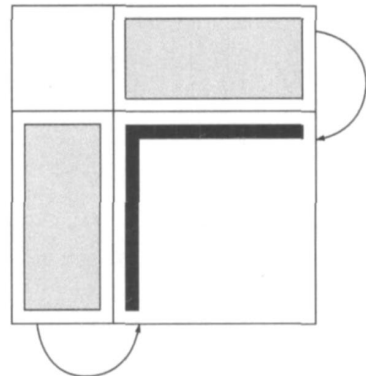


图 1 Crout 分解的计算模式, 黑色部分为第 k 步正在计算的部分, 阴影部分为进行第 k 步的计算需要存取的部分

3.2 丢弃策略

在上述不完全 LU 分解算法中, 需要实施丢弃策略。丢弃策略的选择大致可分为两种: 一种是将分解过程中值较小的元素丢弃; 另一种是在丢弃较小元素的同时, 保证 $\|L_k^{-1}\|$, $\|U_k^{-1}\| \leq \kappa$, κ 为控制分解矩阵的范数。因为很明显 \tilde{L}^{-1} 和 \tilde{U}^{-1} 的范数对预处理之后矩阵的条件数有很大影响, 因此第二种策略更有效和鲁棒。其详细理论证明见文献[16]。本文采用第二种策略, 以保证预处理之后的矩阵具有很好的条件数。

3.3 多层不完全 LU 分解

在上述 Crout 不完全 LU 分解算法基础上, 针对有限元矩阵稀疏、对称且元素分布不确定性的特点, 将代数多重网格的思想应用进来, 构造出下列多层不完全 LU 分解算法。具体而言, 就是首先对有限元矩阵 A 进行排序和置换, 将 A 分解为精细网格 (Fine grid) 和粗糙网格 (coarse grid), 精细网格部分 A_{FF} 的条件数很好, 可以直接对其进行 Crout 不完全 LU 分解; 而粗糙网格再进行排序和置换, 进行下一级的分解。如此递归进行, 直到最后一级的矩阵, 直接对其进行 Crout 不完全 LU 分解。算法的流程见下:

对于矩阵方程 $Ax = b$:

Step 1 对矩阵 A 进行静态部分排序和置换

$$A \rightarrow P^T A Q = \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix}, \rightarrow F, \text{ 'Fine grid points' } \\ C, \text{ 'coarse grid points' }$$

Step 2 分解排序后的矩阵 A_{FF} 并控制 $\|L_k^{-1}\|$,

$$\|U_k^{-1}\| \leq \kappa \\ \begin{bmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{FF} & 0 \\ L_{CF} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{FF} & 0 \\ 0 & S_{CC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{FF} & U_{FC} \\ 0 & I \end{bmatrix} + E$$

Step 3 对近似 Schur 余阵 S_C 进行多级递归的分解策略

$$A \xrightarrow{P} P^T A Q \xrightarrow{P} P^T A Q \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} L_{FF} \cdot D_{FF} \cdot U_{FF} & A_{FC} \\ A_{FC} & S_{CC} \end{pmatrix}$$

$$S_{CC} \xrightarrow{P} P^T S_{CC} Q_S \xrightarrow{P} P^T S_{CC} Q_S \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} S_{FF} \cdot S_{FF} \cdot A_{FF} & S_{FC} \\ S_{CF} & T \end{pmatrix}$$

...

Step 4 多级递归分解完成后, 预处理矩阵可以表示为

$$\begin{pmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{pmatrix}^{-1} \approx \begin{pmatrix} B_{FF} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{FC} \\ I \end{pmatrix} S_{CC}^{-1} \begin{pmatrix} B_{FC} & I \end{pmatrix}$$

$$B_{FF} \approx A_{FF}^{-1}, \quad B_{FC} \approx -A_{FF}^{-1} A_{FC}, \quad B_{CF} \approx -A_{CF} A_{FF}^{-1}$$

Step 5 预处理矩阵构造完毕, 求解矩阵方程 $Ay = c$, 其中

$$A = D^{-1} L^{-1} A U^{-1} \text{ 或者 } A = L^{-1} A U^{-1} D^{-1}$$

细思多级递归结构的构造过程可以发现, 如果我们令

$$P = \begin{pmatrix} B_{BC} \\ I \end{pmatrix}, \quad R^T = \begin{pmatrix} B_{BC} & I \end{pmatrix}$$

则 Step4 可写为

$$\begin{pmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{pmatrix}^{-1} \approx \begin{pmatrix} B_{FF} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P S_{CC}^{-1} R^T$$

若把 P 作为插值算子, R^T 作为限制算子, 则整个多级递归结构就可以看作是一个代数多重网格的 $V(0, 1)$ 算法, 正可谓殊途同归 因此, 本文实施的这种基于不完全 LU 分解的多级递归结构的预处理技术, 可以看成是传统的不完全 LU 分解预处理技术与代数多重网格思想的结合, 兼具高效性与通用性.

4 数值算例与分析

为验证多层不完全 LU 分解预处理方法在合元极技术应用中的高效和通用, 本文下面计算涂层球、介质球和介质填充腔体等几种典型目标的雷达散射截面. 本文的数值实验是在北京理工大学电磁仿真中心祖冲之计算平台 (IBM server xSeries 366, XeonMP 3. 66GHz, 16GB 内存) 下进行的.

首先计算一个横截面 $2\lambda \times 2\lambda$ 的开口腔体, 腔体的深度由 1λ 逐渐变化到 10λ , 腔体内填充介质的介电常数为 $4.0 - 1.0j$. 采用直接法多波前法和采用多层不完全 LU 分解预处理方法所需要的计算资源见表 1.

表 1 开口腔体横截面 $2\lambda \times 2\lambda$, 随着腔体深度的增加, 直接法多波前法和采用本文预处理技术的迭代法所需要的计算资源

腔体深度 (λ)	行列数	非零元素个数	多波前法		多级不完全 LU 预处理法		
			内存 (MB)	总计算时间 (s)	Fill in Factor	内存 (MB)	总计算时间 (s)
1	30450	251251	95	34.27	4.1	39	35.00
2	59660	498861	324	59.05	4.2	70	46.00

(表 1 续表)

腔体深度 (λ)	行列数	非零元素个数	多波前法		多级不完全 LU 预处理法		
			内存 (MB)	总计算时间 (s)	Fill in Factor	内存 (MB)	总计算时间 (s)
3	88870	746471	475	79.63	4.2	95	55.08
4	118080	994081	617	106.28	5.5	130	70.07
5	147290	1241691	881	137.39	5.5	160	81.21
6	176500	1489301	922	148.72	5.5	180	93.00
7	205710	1736911	1,074	171.40	5.5	210	113.25
8	234920	1984521	1,251	207.00	5.6	240	129.00
9	264130	2232131	1,521	250.00	5.5	270	149.80
10	293340	2479741	1,699	281.80	5.5	350	198.46

由表 1 可以看出, 采用多层不完全 LU 分解预处理方法所需的内存远小于多波前法, 且计算时间也同样小于多波前法.

然后计算了一个带有介质涂层的金属球, 金属球外涂层厚度 0.05λ , 涂层介质的介电常数为 $4.0 - 1.0j$. 随着金属球体半径的增加, 直接法多波前法和采用多层不完全 LU 分解预处理方法所需要的计算资源见表 2. 数值结果所得结论与上面例子一样.

表 2 金属球外涂层厚度 0.05λ , 随着金属球体半径的增加, 直接法多波前法和采用本文预处理技术的迭代法所需要的计算资源

金属球直径 (λ)	行列数	非零元素个数	多波前法		多层不完全 LU 分解预处理法	
			内存 (MB)	总计算时间 (s)	内存 (MB)	总计算时间 (s)
2	16002	112003	19	4.29		4.29
4	64002	448003	88	23.84	40	20.00
6	14402	1008003	230	128.92	95	114.46
8	256002	1792003	433	202.19	150	180.07
10	400002	2800003	687	421.12	200	370.21

最后, 本文计算了几种电大尺寸的典型目标的散射特性. 其一为直径 10λ 的介质球, 介质介电常数为 $3.0 - 1.0j$, 使用合元极技术离散后, 有限元部分未知数 3, 971, 450, 非零元素 34, 413, 951, 所需内存为 7.1GB, 总计算时间 7, 500s, 数值结果和 Mie 解析解的比较见图 2; 其二为电尺寸 $5\lambda \times 5\lambda \times 10\lambda$ 的开口腔体, 腔体内填充介质的介电常数为 $4.0 - 1.0j$, 使用本文算法和文献 [6] 所需计算资源的比较见表 3, 数值结果见图 3. 其三为一直径 25λ 的金属球, 金属球外有两层不同介质的涂层, 两层涂层的厚度均为 0.05λ , 涂层介质的介电常数分别为 $1.5 - 0.5j$ 和 $2.5 - 0.5j$, 数值结果与 Mie 解析解得比较见图 4.

表 3 开口腔体 $5\lambda \times 5\lambda \times 10\lambda$, 采用本文预处理技术的迭代法的计算资源与文献[6]所需计算资源的比较

文献[6]		本文	
内存需求(MB)	计算时间(s)	内存需求(MB)	计算时间(s)
2,050	17,940	2,800	65,000

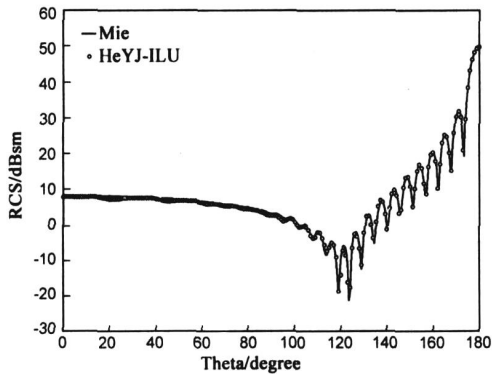


图 2 计算目标为直径 10λ 的介质球的双站雷达散射截面 (RCS), 介质介电常数为 $3.0-1.0j$, 工作频率 300MHz . 使用本文算法与 Mic 解析解结果的比较

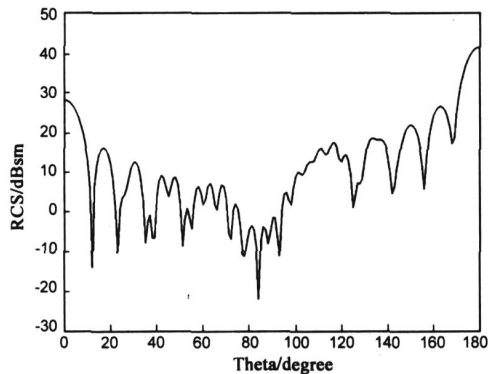


图 3 计算目标为电尺寸 $5\lambda \times 5\lambda \times 10\lambda$ 的开口腔体的双站雷达散射截面, 腔体内填充介质的介电常数为 $4.0-1.0j$, 工作频率 300MHz

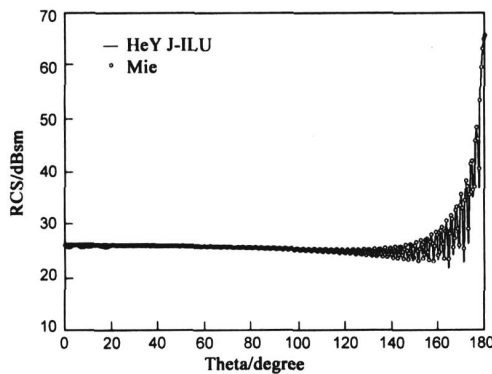


图 4 计算目标为直径 25λ 的金属球, 金属球外有两层不同介质的涂层, 涂层的厚度均为 0.05λ , 涂层介质的介电常数分别为 $1.5-0.5j$ 和 $2.5-0.5j$, 工作频率 300MHz . 使用本文算法与 Mic 解析解 RCS 结果的比较

5 结论

本文针对合元极技术的瓶颈, 提出了一种多层不完

全 LU 分解预处理方法. 此种方法是在 Crout 不完全分解算法基础上, 结合代数多重网格思想, 设计出的一种具有多递进结构的预处理算法, 并成功应用于合元极技术中. 大量的数值实验表明, 这种多层不完全 LU 分解预处理方法, 很大程度上解决合元极技术的瓶颈困难, 大大提高了合元极技术解决问题的能力. 此外, 这种不完全 LU 分解预处理方法, 同样可以应用于其他典型问题有限元矩阵的求解, 如波导问题等, 具有广泛应用意义.

参考文献:

- [1] LU N, et al. Application of fast multipole method to finite element boundary integral solution of scattering problems[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat, 1996, 44(6): 781-786.
- [2] SHENG X Q, et al. On the formulation of hybrid finite element and boundary integral method for 3D scattering[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat, 1998, 46(3): 303-311.
- [3] SHENG X Q, et al. Implementation and experiments of a hybrid algorithm of the finite element boundary integral method for open region inhomogeneous electromagnetic problems[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2002, 50(2): 163-167.
- [4] LIU J, et al. A highly effective preconditioner for solving the finite element boundary integral matrix equation for 3D scattering[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2002, 50(9): 1212-1221.
- [5] SHENG X Q, et al. Scattering from large bodies with cracks and cavities by fast and accurate hybrid finite element boundary integral method[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2000, 48(8): 1153-1160.
- [6] LIU J, et al. Scattering analysis of a large body with deep cavities[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2003, 51(6): 1157-1167.
- [7] Tang Y H, et al. Analysis of electromagnetic scattering from 3D conductors coated with anisotropic inhomogeneous materials using the FEM-FMA[A]. 2002 3rd International conference on microwave and millimeter wave technology proceedings, Beijing [C]. Beijing, 2002, (8): 622-625.
- [8] Vouvakis M N, et al. A symmetric FEM-IE formulation with a single level IE-QR algorithm for solving electromagnetic radiation and scattering problems[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2004, 52(11): 3060-3070.
- [9] Botha M M, et al. On the variational formulation of hybrid finite element boundary integral techniques for electromagnetic analysis[J]. IEEE Trans. Antennas Propagat, 2004, 52(11): 3037-3047.
- [10] 盛新庆, 彭朕. 合元极技术的再研究[J]. 电子学报, 2006, 34(1): 93-98.

SHENG X Q, et al. Further Cognition of Hybrid FE/BI/MLFMA - Investigation of the Hybrid Computing Technique for

- Scattering by Large Complex Targets [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(1) : 93- 98.
- [11] 盛新庆. 计算电磁学要论 [M]. 北京: 科学出版社, 2004. 85- 88.
- [12] DUFF I S, et al. The multifrontal solution of indefinite sparse symmetric linear system [J]. ACM Trans. on Mathematical Software. 1983, 9: 302- 325.
- [13] SAAD Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems [M]. Boston: PWS Publishing Company, 1996.
- [14] LI N, et al. Crout versions of ILU for general sparse matrices [J]. SIAM J. Sci. Comput. , 2004, 25(2) : 716- 728.
- [15] SAAD Y, et al. ARMS: An algebraic recursive multilevel solver for general sparse linear systems [J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2002, 9(6) : 359- 378.
- [16] BOLLHOFFER M. A robust and efficient ILU that incorporates the growth of the inverse triangular factors [J]. SIAM J. Sci. Comput. , 2004, 25(1) : 86- 103.

作者简介:



彭 朕 男, 1982 年 7 月生, 河南省信阳人, 于 2003 年获得中国科学技术大学电子工程与信息科学系的学士学位, 同年进入中国科学院电子学研究所硕博连读. 从事计算电磁学, 电磁散射特性以及高性能算法的研究. E-mail: sharonshao@vip.sina.com



盛新庆 男, 1968 年 8 月生, 安徽省黄山市人. 北京理工大学教授, 博士生导师. 2001 年度中国科学院“百人计划”入选者. 2004 年度教育部长江学者特聘教授. 主要从事计算电磁学、目标电磁特性、微波成像及遥感、电磁兼容、天线理论及设计等方面的研究. 专著一本《计算电磁学要论》, 列入当代杰出青年科学文库. 共发表论文 100 余篇, 其中 SCI 论文 40 余篇, EI 论文 60

余篇. E-mail: xsheng@bit.edu.cn